



"N o existe la suerte, solo hay preparación adecuada o inadecuada, para hacer frente a una estadística".

TALLER DE REPASO SOBRE TEORIA DE CONJUNTOS

La teoría de conjuntos está relacionada con la teoría de la probabilidad en la parte de eventos; por lo tanto es importante que realices un recorrido por la teoría de la probabilidad y recuerdes conceptos vistos anteriormente. Consulta y escríbelos en tu cuaderno con ejemplos las nociones de:

1.
 - a. Conjunto
 - b. Elemento
 - c. Relación de pertenencia
 - d. Determinación de un conjunto
 - e. Clases de conjuntos
 - f. Inclusión o subconjunto
 - g. Operaciones entre conjuntos (unión, intersección, complemento, diferencia, diferencia simétrica)
2. Utiliza diagramas de ven para comprobar las siguientes propiedades:
 - a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
 - c. $A - B = A \cap B'$
3. Solución de problemas:

Analiza el siguiente problema.

En una encuesta realizada en un colegio de la ciudad a un total de 150 estudiantes, se hallaron los siguientes datos;

54 estudian algebra, 89 estudian inglés, 80 estudian ciencias naturales, 60 estudian ciencias naturales e inglés, 10 estudian algebra solamente, 20 estudian algebra y ciencias, 15 estudian las tres materias

Realiza el grafico correspondiente y calcula:

- a. ¿Cuántos estudian algebra e inglés pero no ciencias?
- b. ¿Cuántos estudian solo una materia?
- c. ¿Cuántos estudian a lo sumo dos materias?
- d. ¿Cuántos estudian ciencias e inglés pero no algebra?
- e. ¿Cuántos estudian mínimo dos materias?

PROBABILIDAD

¿CÓMO SURGIO?

En la historia existen pocas referencias de la probabilidad y la estadística que daten de épocas antiguas; por ejemplo en las civilizaciones griega, india y china, tres de las civilizaciones clásicas más importantes no hay evidencia sobre estudios que traten de la existencia de regularidades en fenómenos que no pueden predecirse, pues a acontecimientos como naufragios, diluvios, sequías y hecatombes no podían interpretarse con las matemáticas de entonces, para los griegos por ejemplo, el azar estaba divinizado por seres mitológicos a quienes se les atribuía la autoría de muchos eventos, hoy día considerados azarosos, a los que el hombre no podía dar explicación.

Aún la matemática de este tipo se encontraba necesariamente ligada al arte de contar, a la agrimensura, a la medición del tiempo, y al dominio matemático con el cual se llevaban a cabo estos estudios correspondía a la aritmética, la geometría y la astronomía. Es decir la estructura incipiente de las matemáticas no permitía el desarrollo de una teoría del azar. Fue en el siglo XVIII cuando surgieron las primeras tentativas por dar una fundamentación matemática al azar. Dichas investigaciones fueron realizadas por matemáticos como Girolamo Cardano (1501-1576) a quien se debe el primer escrito sobre probabilidad, aun cuando referido al juego de los dados; Abraham Demoivre (1667-1754) refugiado Francés en Inglaterra, como consecuencia de guerras religiosas; en su escrito la doctrina del azar (1718, reeditado en 1735 y en 1736) muestra una primera visión del teorema del límite central a que Gauss y especialmente Laplace le darían luego una forma más general.

¿EN QUE SE APLICA?

Si un científico trata en su trabajo con fenómenos de naturaleza probabilística, usualmente necesitara del análisis dinámico de la teoría de probabilidades; en dicho análisis se estudia en conjunto de variables de origen aleatorio. Ejemplos de estos estudios se presentan en biología, medicina, ingeniería, telecomunicaciones, economía, psicología, geología, etc.

Consideramos el siguiente caso concreto: en una corporación financiera se origina una cola (ó línea de espera) cuando los clientes que llegan al mismo punto para recibir un servicio o realizar una operación, deben esperar para ser atendidos.

El tiempo de demora para despachar el servicio de cada cliente es una variable aleatoria. Por otra parte el tiempo entre llegadas consecutivas de clientes es un conjunto de variables aleatorias, las cuales se asumen mutuamente independientes y usualmente con el mismo modelo de distribución de probabilidades, se supone que los clientes se atienden en el orden de llegada.

El problema central de la llamada TEORIA DE LAS COLAS consiste en modelar (de la mejor manera posible) la distribución del tiempo de espera de los clientes que llegan al sistema.

Existen muchos ejemplos de línea de espera: las personas que en un aeropuerto esperan para validar su tiquete, los aviones que llegan a un aeropuerto, los taxis que esperan en un terminal terrestre o aéreo para dar su servicio, los mensajes transmitidos vía internet a un servidor, etc.

CONCEPTOS BASICOS DE PROBABILIDAD

PROBABILIDAD: es la ciencia que se encarga del estudio de experimentos en los que se presenta la incertidumbre acerca de los posibles resultados finales. La probabilidad se encarga del estudio de situaciones en las cuales se puede construir modelos matemáticos que necesitan considerar diferentes posibilidades de ocurrencia para predecir el resultado final. A estos modelos se les llama: MODELOS PROBABILISTICOS.

EXPERIMENTO ALEATORIO: es un proceso o acción en el cual se pueden esperar varios resultados por ejemplo: lanzar un dado, jugar a la lotería, apostar el resultado final de un partido de futbol. Los experimentos aleatorios son ensayos en los cuales se evidencia la incertidumbre. Se conocen los posibles resultados pero no se sabe en qué van a terminar.

ESPACIO MUESTRAL: el espacio muestral de un experimento aleatorio, notado como E_m es el conjunto de todos los posibles resultados que se pueden obtener al realizar el experimento.

LA PROBABILIDAD EXPERIMENTAL: de ocurrencia de un evento está determinado por la RAZON entre las veces que ocurre y el total de veces que se repite el experimento en las mismas condiciones; en este sentido se mide a través de la frecuencia relativa del evento en muchas repeticiones de la experiencia.

En un espacio muestral en donde todos los eventos elementales tienen la misma posibilidad de ocurrencia; la probabilidad de que ocurra un evento elemental es:

$$\frac{1}{\# \text{ de elementos del } E_m}$$

LA PROBABILIDAD TEORICA: de un evento cualquiera está determinada por el cociente entre el número de elementos del evento y el número de elementos del espacio muestral.

$$P(A) = \frac{\# \text{ de los elementos del evento}}{\# \text{ de elementos del } E(m)}$$

Para cada evento de un espacio muestral se puede calcular la probabilidad de ese evento y además, se cumplen las siguientes condiciones:

- Para cualquier evento E se cumple $0 \leq P(E) \leq 1$
- La probabilidad de un evento cuya ocurrencia es imposible es cero.
- La probabilidad de un evento cuya ocurrencia es segura es uno.
- La suma de las probabilidades de todos los eventos elementales de un espacio muestral es 1.



Ejemplo: en el lanzamiento de una moneda se llama CARA al resultado en donde aparece la imagen de un prócer o un motivo nacional; se llama SELLO, al resultado en donde aparece la denominación o valor de la moneda. ¿Cual es la probabilidad de obtener cara?

Si suponemos que la moneda es legal y que ambas caras tiene igual probabilidad de aparecer; como el espacio muestral es { c, s} entonces la probabilidad teórica será:

$$P(c) = \frac{\text{número de elementos del evento CARA}}{\text{número de elements del espacio muestral}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Si no conocemos el espacio muestral, es necesario lanzar la moneda muchas veces, hasta que la frecuencia relativa se estabilice y el valor que se obtiene es la probabilidad. Observa los resultados en la tabla.

Lanzamientos	Caras	Frecuencia relativa
10	6	0,600
20	13	0,650
30	17	0,566
40	23	0,575
50	28	0,560
60	34	0,566
70	34	0,571
80	40	0,550
90	44	0,533
100	48	0,530
110	53	0,527
120	58	0,516
130	62	0,515

SUCESO COMPUESTO: Es un subconjunto de sucesos elementales

Ejemplo: lanzamos un dado y queremos que salga un número par: el suceso “número par” es un suceso compuesto integrado por tres sucesos elementales; el 2, el 4, y el 6.

Otro ejemplo, juguemos a la ruleta y queremos que salga “menor o igual que 18”, este es un suceso compuesto formado por 18 sucesos elementales (todos los números que van del 1 al 18)

Al conjunto de todos los posibles sucesos elementales lo denominamos **espacio muestral**.

Cada experimento aleatorio tiene definido su espacio muestral (es decir un conjunto con todas las soluciones posibles).

Si tiramos una moneda al aire una sola vez el espacio muestral será cara o cruz. Si el experimento consiste en lanzar una moneda al aire dos veces entonces el espacio muestral estaría formado por (cara-cara), (cara-cruz), (cruz –cara) y (cruz – cruz).

PROBABILIDAD: RELACIONES ENTRE SUCESOS

Entre los sucesos compuestos se pueden establecer distintas relaciones:

a) Un suceso puede estar contenido en otro: las posibles soluciones del primer suceso también lo son del segundo, pero este segundo suceso tiene además otras soluciones suyas propias.

Ejemplo: lanzamos un dado y analizamos dos sucesos: a) que salga el número 6, y b) que salga un número par. Vemos que el suceso a) está contenido en el suceso b).

Siempre que se da el suceso a) se da el suceso b), pero no al contrario. Por ejemplo, si el resultado fuera el 2, se cumpliría el suceso b), pero no el el a).

b) Dos sucesos pueden ser iguales: esto ocurre cuando siempre que se cumple uno de ellos se cumple obligatoriamente el otro y viceversa.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que salga múltiplo de 2. Vemos que las soluciones coinciden en ambos casos.

c) Unión de dos o más sucesos: la unión será otro suceso formado por todos los elementos de los sucesos que se unen.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par y b) que el resultado sea mayor que 3. El suceso unión estaría formado por los siguientes resultados: el 2, el 4, el 5 y el 6

d) Intersección de sucesos: es aquel suceso compuesto por los elementos comunes de dos o más sucesos que se intersectan.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire, y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que sea mayor que 4. La intersección de estos dos sucesos tiene un sólo elemento, el número 6 (es el único resultado común a ambos sucesos: es mayor que 4 y es número par).

e) Sucesos incompatibles: son aquellos que no se pueden dar al mismo tiempo ya que no tienen elementos comunes (su intersección es el conjunto vacío).

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga un número menor que 3, y b) que salga el número 6. Es evidente que ambos no se pueden dar al mismo tiempo.

f) Sucesos complementarios: son aquellos que si no se da uno, obligatoriamente se tiene que dar el otro.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga un número par, y b) que salga un número impar. Vemos que si no se da el primero se tiene que dar el segundo (y viceversa).

CALCULOS DE PROBABILIDADES

La probabilidad mide la mayor o menor posibilidad de que se dé un determinado resultado (suceso o evento) cuando se realiza un experimento aleatorio.

Para calcular la probabilidad de un evento se toma en cuenta todos los casos posibles de ocurrencia del mismo; es decir, de cuántas formas puede ocurrir determinada situación.

Los casos favorables de ocurrencia de un evento serán los que cumplan con la condición que estamos buscando.

La probabilidad toma valores entre 0 y 1 (o expresados en tanto por ciento, entre 0% y 100%):

El **valor cero** corresponde al suceso imposible; ejemplo: lanzamos un dado al aire y la probabilidad de que salga el número 7 es cero.

El **valor uno** corresponde al suceso seguro, ejemplo: lanzamos un dado al aire y la probabilidad de que salga cualquier número del 1 al 6 es igual a uno (100%).

El resto de sucesos tendrá probabilidades entre cero y uno: que será tanto mayor cuanto más probable sea que dicho suceso tenga lugar.

¿COMO SE MIDE LA PROBABILIDAD?

Uno de los métodos más utilizados es aplicando la Regla de Laplace: define la probabilidad de un suceso como el cociente entre casos favorables y casos posibles.

$$P_{\text{(suceso)}} = \frac{\text{casos favorables (f)}}{\text{casos posibles (n)}}$$

Ejemplos:

a) Probabilidad de que al lanzar un dado salga el número 2: el caso favorable (f) es tan sólo uno (que salga el dos), mientras que los casos posibles (n) son seis (puede salir cualquier número del uno al seis).

Por lo tanto:

$$P_{\text{(suceso)}} = \frac{f}{n} = \frac{1}{6} = 0,166 \quad (\text{o lo que es lo mismo, } 16,6\%)$$

b) Probabilidad de que al lanzar un dado salga un número par: en este caso los casos favorables (f) son tres (que salga el dos, el cuatro o el seis), mientras que los casos posibles (n) siguen siendo seis.

Por lo tanto:

$$P_{\text{(suceso)}} = \frac{f}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,50 \quad (\text{o lo que es lo mismo, } 50\%)$$



c) Probabilidad de que al lanzar un dado salga un número menor que 5: en este caso tenemos cuatro casos favorables (f) (que salga el uno, el dos, el tres o el cuatro), frente a los seis casos posibles.

Por lo tanto:

$$P_{\text{(suceso)}} = \frac{f}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,666 \quad (\text{o lo que es lo mismo, } 66,6\%)$$

d) Probabilidad de ganarse el premio mayor de una lotería en la que juegan 100.000 números: tan sólo un caso favorable (f), el número que jugamos, frente a los 100.000 casos posibles (n).

Por lo tanto:

$$P_{\text{(suceso)}} = \frac{1}{100.000} = 0,00001 \quad (\text{o lo que es lo mismo, } 0,001\%)$$

Condiciones importantes

Para poder aplicar la Regla de Laplace el experimento aleatorio tiene que cumplir dos requisitos:

a) El número de resultados posibles (sucesos o eventos) tiene que ser finito. Si hubiera infinitos resultados, al aplicar la regla "casos favorables dividido por casos posibles" el cociente siempre sería cero.

b) Todos los sucesos o eventos tienen que tener la misma probabilidad. Si al lanzar un dado, algunas caras tuvieran mayor probabilidad de salir que otras, no podríamos aplicar esta regla.

A la regla de Laplace también se le denomina "probabilidad a priori", ya que para aplicarla hay que conocer antes de realizar el experimento cuales son los posibles resultados y saber que todos tienen las mismas probabilidades.

Cuando se realiza un experimento aleatorio un número muy elevado de veces, las probabilidades de los diversos posibles sucesos empiezan a converger hacia valores determinados, que son sus respectivas probabilidades.

¿y si el experimento aleatorio no cumple los dos requisitos indicados, que hacemos? ¿ponemos una denuncia?

No, no va a ser necesario denunciar a nadie, ya que en este caso podemos acudir a otro modelo de cálculo de probabilidades que se basa en la experiencia (**modelo frecuentista**):

Cuando se realiza un experimento aleatorio un número muy elevado de veces, las probabilidades de los diversos posibles sucesos empiezan a converger hacia valores determinados, que son sus respectivas probabilidades.

Ejemplo: si lanzo una vez una moneda al aire y sale "cara", quiere decir que el suceso "cara" ha aparecido el 100% de las veces y el suceso "cruz" el 0%.

Si lanzo diez veces la moneda al aire, es posible que el suceso "cara" salga 7 veces y el suceso "cruz" las 3 restantes. En este caso, la probabilidad del suceso "cara" ya no sería del 100%, sino que se habría reducido al 70%.

Si repito este experimento un número elevado de veces, lo normal es que las probabilidades de los sucesos "cara" y "cruz" se vayan aproximando al 50% cada una. Este 50% será la probabilidad de estos sucesos según el modelo frecuentista.

En este modelo ya no será necesario que el número de soluciones sea finito, ni que todos los sucesos tengan la misma probabilidad.

Ejemplo: si la moneda que utilizamos en el ejemplo anterior fuera defectuosa (o estuviera trucada), es posible que al repetir dicho experimento un número elevado de veces, la "cara" saliera con una frecuencia, por ejemplo, del 65% y la "cruz" del 35%. Estos valores serían las probabilidades de estos dos sucesos según el modelo frecuentista.



A esta definición de la probabilidad se le denomina **probabilidad a posteriori**, ya que tan sólo repitiendo un experimento un número elevado de veces podremos saber cual es la probabilidad de cada suceso.

Todos los hombres cometen errores, pero solo los sabios aprenden de ellos". Winston Churchill



Probabilidad de sucesos

Al definir los sucesos hablamos de las diferentes relaciones que pueden guardar dos sucesos entre sí, así como de las posibles relaciones que se pueden establecer entre los mismos. Vamos a ver ahora cómo se refleja esto en el cálculo de probabilidades.

a) Un suceso puede estar contenido en otro: entonces, la probabilidad del primer suceso será menor que la del suceso que lo contiene.

Ejemplo: lanzamos un dado y analizamos dos sucesos: a) que salga el número 6, y b) que salga un número par. Dijimos que el suceso a) está contenido en el suceso b).

$$P(A) = 1/6 = 0,166$$

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

Por lo tanto, podemos ver que la probabilidad del suceso contenido, suceso a), es menor que la probabilidad del suceso que lo contiene, suceso b).

b) Dos sucesos pueden ser iguales: en este caso, las probabilidades de ambos sucesos son las mismas.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que salga múltiplo de 2. Las soluciones coinciden en ambos casos.

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

c) Intersección de sucesos: es aquel suceso compuesto por los elementos comunes de los dos o más sucesos que se intersectan. La probabilidad será igual a la probabilidad de los elementos comunes.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que sea mayor que 3. La intersección de estos dos sucesos tiene dos elementos: el 4 y el 6.

Su probabilidad será por tanto:

$$P(A \cap B) = 2 / 6 = 0,33$$

d) Unión de dos o más sucesos: la probabilidad de la unión de dos sucesos es igual a la suma de las probabilidades individuales de los dos sucesos que se unen, menos la probabilidad del suceso intersección

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que el resultado sea mayor que 3. El suceso unión estaría formado por los siguientes resultados: el 2, el 4, el 5 y el 6.

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P(A \cap B) = 2 / 6 = 0,33$$

$$\text{Por lo tanto, } P(A \cup B) = (0,50 + 0,50) - 0,33 = 0,666$$

e) Sucesos incompatibles: la probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles será igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos (ya que su intersección es el conjunto vacío y por lo tanto no hay que restarle nada).

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga un número menor que 3, y b) que salga el número 6.

La probabilidad del suceso unión de estos dos sucesos será igual a:

$$P(A) = 2 / 6 = 0,333$$

$$P(B) = 1 / 6 = 0,166$$

$$\text{Por lo tanto, } P(A \cup B) = 0,33 + 0,166 = 0,50$$

f) Sucesos complementarios: la probabilidad de un suceso complementario a un suceso (A) es igual a $1 - P(A)$

Ejemplo: lanzamos un dado al aire. el suceso (A) es que salga un número par, luego su complementario, suceso (B), es que salga un número impar.

La probabilidad del suceso (A) es igual a :

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

Luego, la probabilidad del suceso (B) es igual a:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,50 = 0,50$$

Se puede comprobar aplicando la regla de "casos favorables / casos posibles":

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

g) Unión de sucesos complementarios: la probabilidad de la unión de dos sucesos complementarios es igual a 1.

Ejemplo: seguimos con el ejemplo anterior: a) que salga un número par, y b) que salga un número impar. La probabilidad del suceso unión de estos dos sucesos será igual a:

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

$$\text{Por lo tanto, } P(A \cup B) = 0,50 + 0,50 = 1 = 100\%$$

La mayoría de las personas fracasan porque les falta la persistencia para crear nuevos planes que reemplazan aquellos que no funcionan". Mark Victor Hansen

